Aula 20

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \qquad A(t), \mathbf{b}(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$a_{i,j}(t), b_j(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Sejam $A(t), \mathbf{b}(t)$ respectivamente, uma matriz $n \times n$ e um vector $n \times 1$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o problema de valor inicial para o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

com $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, tem solução única com intervalo de definição máximo I.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem Homogéneos

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} \qquad A(t) \text{ contínua em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(y) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) \end{cases}$$

$$a_{i,j}(t) \text{ contínuos em } t \in I \subset \mathbb{R}$$

com condição inicial

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Proposição: Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o conjunto das soluções do sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

constitui um espaço vectorial de dimensão n.
O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de um isomorfismo linear entre o espaço vectorial dos dados iniciais $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$ e o espaço vectorial das soluções.

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem

Homogéneos de Coeficientes Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ constante com entradas reais. Então,

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v},$$

é solução do sistema linear homogéneo de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

se e só se λ e $\mathbf{v}$ são, respectivamente, valor e vector próprio associado da matriz A.

Proposição: Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas **reais** contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t),$$

é solução complexa do sistema linear homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

se e só se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são soluções reais do mesmo sistema.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = 2 \quad \text{multiplicidade algébrica} = 2, \text{geométrica} = 1.$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Uma só solução linearmente independente da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Proposição: Uma matriz A, $n \times n$, de coeficientes constantes tem n vectores próprios associados linearmente independentes se e só se é diagonalizável.

Definição: Dada uma matriz A de coeficientes constantes chama-se **multiplicidade algébrica** dum valor próprio λ de A à sua multiplicidade como raíz do polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.
Chama-se **multiplicidade geométrica** dum valor próprio λ à dimensão do correspondente espaço próprio, ou seja, ao número de vectores próprios linearmente independentes associados a λ.

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e λ um valor próprio. Então

$$1 \leq \text{mult. geométrica de } \lambda \leq \text{mult. algébrica de } \lambda \leq n$$