Aula 20

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem
Homogéneos de Coeficientes Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ constante com entradas reais. Então,

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v},$$

é solução do sistema linear homogéneo de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

se e só se λ e $\mathbf{v}$ são, respectivamente, valor e vector próprio associado da matriz A.

Proposição: Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$ com entradas **reais** contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t),$$

é solução complexa do sistema linear homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}$$

se e só se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são soluções reais do mesmo sistema.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$\lambda = 2$ multiplicidade algébrica $= 2$, geométrica $= 1$.

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Uma só solução linearmente independente da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Proposição: Uma matriz A, $n \times n$, de coeficientes constantes tem n vectores próprios associados linearmente independentes se e só se é diagonalizável.

Definição: Dada uma matriz A de coeficientes constantes chama-se **multiplicidade algébrica** dum valor próprio λ de A à sua multiplicidade como raíz do polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.
Chama-se **multiplicidade geométrica** dum valor próprio λ à dimensão do correspondente espaço próprio, ou seja, ao número de vectores próprios linearmente independentes associados a λ.

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e λ um valor próprio. Então

$$1 \leq \text{mult. geométrica de } \lambda \leq \text{mult. algébrica de } \lambda \leq n$$